$$c_3 = a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x| \cos x dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx = 0.$$

;-)

13.2 Desigualdade de Bessel. Igualdade de Parseval.

Seja $\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx < \infty$. Consideremos

$$0 \le \int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n[f]|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot S_n[f] dx + \int_{-\pi}^{\pi} \big(S_n[f]\big)^2 dx. \tag{13.1}$$

Note que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(S_n[f]\big)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\Big)^2 dx = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\Big),$$

e além disso

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\Big) dx = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\Big).$$

Portanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(S_n[f]\big)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot S_n[f] dx. \tag{13.2}$$

Agora (13.1) e (13.2) implicam que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x)\big)^2 dx \ge \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2.$$

Então quando $n \to \infty$, temos

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x)\Big)^2 dx \ge \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2. \tag{13.3}$$

A desigualdade (13.3) chama se *Desigualdade de Bessel*.

Corolario 13.2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_k^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_k^2$ convergem.

■ **Exemplo 13.2** Seja $f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi]$. Então

$$S[f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx), \quad a_n = 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x)\big)^2 dx = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Assim, pelo (13.3) temos

$$\frac{2\pi^2}{3} \ge \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(0 + \frac{4}{n^2}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$

13.3 Identidade de Parseval

Teorema 13.3.1 — Convergencia em media quadrática. Seja $\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx < \infty$, assim

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n[f]|^2 dx = 0,$$

ou seja $S[f]$ **converge em media quadrática** para f.

Corolario 13.3.2 Temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n[f]|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - \pi\Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\Big) = 0$$

se e somente se

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x)\Big)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{13.4}$$

A identidade (13.4) é dita a **identidade de Parseval**.

■ **Exemplo 13.3** Ache a série de Fourier e escreva a identidade de Parseval da função $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in [-\pi, \pi]$ (veja Figura 13.1).

Solução. Temos

$$S[f] = S[x^2] + 2S[x] = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{n^2} \cos(nx) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx)}{n}$$
$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{(-1)^n \cdot 4}{n^2} \cos(nx) + \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx) \Big).$$

Portanto $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 4}{n^2}$ e $b_n = \dfrac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{n}$. Usando continuidade de $f(x)$, obtemos

$$S[f](x) = f(x) = x^2 + 2x, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Além disso,

$$S[f](\pm\pi) = \frac{\lim_{x\to-\pi+} f(x) + \lim_{x\to\pi-} f(x)}{2} = \frac{\pi^2 - 2\pi + \pi^2 + 2\pi}{2} = \pi^2.$$

Logo

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x)\Big)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + 2x)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^4 + 4x^3 + 4x^2) dx$$
$$= \frac{1}{\pi} \Big(\frac{x^5}{5} + \frac{4}{3} x^3 \Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{5} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{8}{3} \pi^3 = \pi^2 \big(\frac{2}{5} \pi^4 + \frac{8}{3} \big).$$

Como

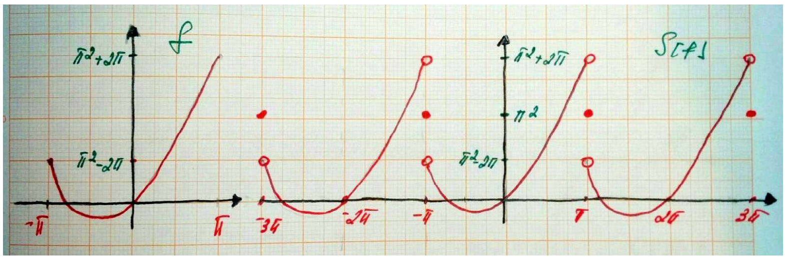

Figure 13.1: gráfico de $S[f]$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

obtemos

$$\pi^2\left(\frac{2}{5}\pi^4+\frac{8}{3}\right) = \frac{\pi^4}{2\cdot 9}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16}{n^4}+\frac{16}{n^2}\right).$$

;-)

13.4 Séries de senos e cossenos

Seja $f(x):[0,L]\to\mathbb{R}$. Como definir $S[f]$ para f definida no intervalo não simétrico? Ideia é construir primeiro expansão da função para o intervalo simétrico $[-L,L]$.

Definição 13.4.1 Seja $f(x):[0,L]\to\mathbb{R}$.

1) A *extensão par* de f é definida por

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & 0\le x\le L \\ f(-x), & -L\le x<0. \end{cases}$$

2) A *extensão ímpar* de f é definida por

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & 0< x\le L \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & -L\le x<0. \end{cases}$$

■ **Exemplo 13.4** Ache as extensões par e ímpar de função

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2}\le x\le 1. \end{cases}$$

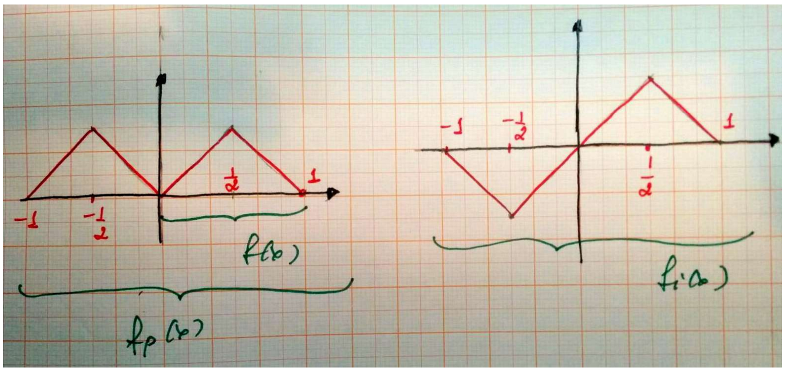

Figure 13.2: extensão par e ímpar da f

Solução. Temos (veja Figure 13.2).

$$f_p(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} \le x \le 1, \\ -x, & -\frac{1}{2} < x < 0, \\ 1+x, & -1 \le x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

e

$$f_i(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} \le x \le 1, \\ x, & -\frac{1}{2} < x < 0, \\ -1-x, & -1 \le x < \frac{1}{2}. \end{cases} = \begin{cases} -1-x, & -1 \le x < \frac{1}{2}, \\ x, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

;-)

Definição 13.4.2 Seja $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ e

1) f_p sua extensão par, então *serie de cossenos* de f é

$$S[f_p] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_p(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx;$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_p(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

2) f_i sua extensão ímpar, então *serie de senos* de f é

$$S[f_i] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

onde

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_i(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Obs Se f é de classe C^1 por partes em $[0,L]$ e continua em $x_0 \in (0,L)$, então

$$S[f_p](x_0) = S[f_i](x_0) = f(x_0).$$

Exemplo 13.5 Ache a série de senos da função

$$f(x) = x^2, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Solução.

$$f_i(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le \pi \\ -x^2, & -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{sen}(nx)dx = \left\{\begin{array}{l} u' = \mathrm{sen}(nx), \\ v = x^2 \end{array}\right\} \\ &= -\frac{2}{\pi}x^2\cdot\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cdot x\frac{\cos(nx)}{n}dx = \left\{\begin{array}{l} u' = \cos(nx), \\ v = x \end{array}\right\} \\ &= -\frac{2}{\pi}\frac{\pi^2\cdot\cos(\pi n)}{n} + \frac{4}{\pi n}\frac{\mathrm{sen}(nx)}{n}\cdot x\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(nx)dx \\ &= \frac{2\pi\cdot(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^2}\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3}. \end{aligned}$$

Assim

$$S[f_i] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3}\right)\mathrm{sen}(nx)$$

é a série de senos. Pela continuidade de f, obtemos

$$S[f_i](x) = f_i(x), \quad x \in (-\pi,\pi)$$

e $S[f_i](\pm\pi) = 0$. Veja Figura 13.3. ;-)

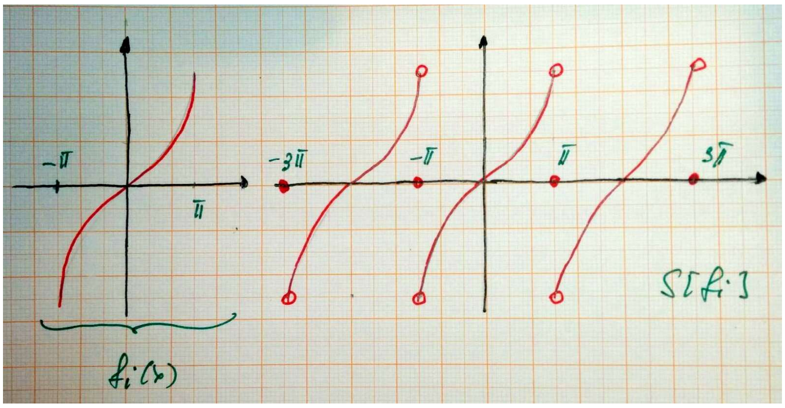

Figure 13.3: